Online World Math Contest 2021
(In pratica la finalissima internazione dei Campionati Matematici aperta a tutti)
28 agosto 2021
Soluzioni

Ronny Montagnani

25 dicembre 2021

Ver: 1.0

Questiti per categorie

- cat A: quesiti da 1 a 5
- cat B: quesiti da 1 a 8
- cat C: quesiti da 1 a 11
- cat D: quesiti da 1 a 14
- cat E: quesiti da 1 a 16
- cat F: quesiti da 1 a 16
- cat G: quesiti da 1 a 18

1 Nell'ordine

Osservando il disegno vediamo le seguenti relazioni tra i quadrati:

- B copre E
- B copre D
- E copre D
- D copre A

- D copre C
- A copre C

Da cui si ricava la sequenza di relazioni di copertura:

B copre E, E copre D, D copre A, A copre C

L'ordine di copertura individuato è l'inverso dell'ordine di posizionamento: un quadrato ne copre un altro se è stato messo dopo.
Quindi la relazione di posizionamento diventa:

C è stato messo dopo A, A è stato messo dopo D, D è stato messo dopo E, E è stato messo dopo B

Il terzo posizionato è il **quadrato D**.

2 La scala

Il problema ci chiede di contare in quanti modi posso salire 4 gradini con passi di 1 o di 2 gradini. Cioè in quanti modi posso ottenere 4 sommando i numeri 1 e 2, questi si possono facilmente elencare:

- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$
- $4 = 1 + 1 + 2$
- $4 = 1 + 2 + 1$
- $4 = 2 + 1 + 1$
- $4 = 2 + 2$

La precisazione "Ethan inizia sempre con il piede sinistro" serve a far sì che la stessa modalità di salita non possa essere eseguita in due modi, cioè salendo prima col destro o col sinistro.

I modi possibili sono **5**.

3 BABA

Il testo del problema ci permette di scrivere che:

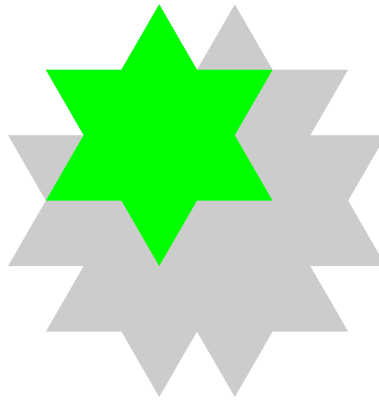
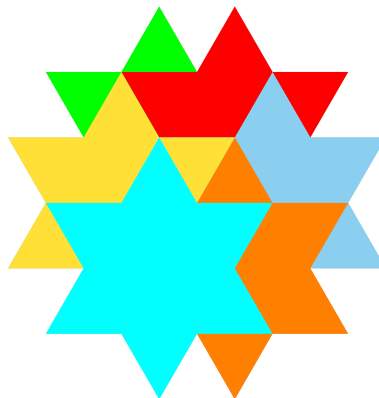
$$B + A + B + A = A \times 10 + B$$

Da cui ricaviamo:

$$
\begin{aligned}
2A + 2B &= 10A + B \\
2B &= 8A + B \\
B &= 8A
\end{aligned}
$$

L'unica possibilità è che A sia 1 e B sia 8, da cui ricaviamo **AB=18**.

4 Le stelle e il virus

Con la sovrapposizione dellla stella piccola utilizzata da Matilda sulla figura del virus si riescono a coprire solo 2 delle 12 punte.

Per coprire tutte le 12 punte avremo quindi bisogno di almeno 6 stelle.
Possiamo facilmente mostrare che con **6 stelle** si riesce a realizzare la figura del virus:

5 Il gettone

Utilizzando 10 gettoni James deve passare dall'averne 6 a 20: deve guadagnarne 14. Il gettone blu permette di guadagnare 2 rossi e quindi di aumentare il numero di gettoni totali di 1. Il gettone rosso permette di guadagnare 3 blu e quindi di aumentare il numero di gettoni totali di 2.
Chiamiamo r il numero di gettoni rossi inseriti e b il numero di gettoni blu inseriti. Il numero di gettoni guadagnati è quindi $2r + b$, inoltre il totale di gettoni inseriti è $r + b$, da cui il sistema:

$$\begin{cases} 2r + b = 14 \\ r + b = 10 \end{cases}$$

che ha come soluzione $r = 4$ e $b = 6$.

I 4 gettoni rossi fanno aumentare il totale di 8 e i 6 gettoni blu di altri 6.

Si può arrivare alla stessa conclusione con ragionamento alternativo: osserviamo che utilizzando 10 gettoni blu (che in questo caso non è possibile, ma ci è utile come considerazione generale) si guadagnano 10 gettoni. Per aumentare il numero di gettoni guadagnati si devono inserire quelli rossi al posto dei blu. Per ogni rosso si guadagna un gettone in più e quindi per passare da 10 a 14 gettoni gudagnati si ha bisogno di inserire 4 gettoni rossi al posto di 4 gettoni blu.
Con questo scelta James guadagna 12 gettoni blu inserendo 4 gettoni rossi, e poi ne usa 6 per guadagnare 12 gettoni rossi. Alla fine James ha **12-6=6 gettoni blu**.

6 Lo scuolaubs

Chiamiamo x il numero di ragazzi, e quindi anche di ragazze, presenti nell'autobus all'inizio del suo itinerario. Il numero di passeggeri iniziali è $2x$.

Alla prima fermata il numero di ragazzi diventa $x + 1$ ed il numero di ragazze diventa $\frac{x}{2}$. Per cui il totale di passeggeri è:

$$(x + 1) + (\frac{x}{2}) \tag{1}$$

Alla seconda fermata il numero totale di passeggeri diventa diventa $\frac{4}{5}$ in quanto $\frac{1}{5}$ di essi scende: Per cui il totale di passeggeri è:

$$4\frac{(x+1)+(\frac{x}{2})}{5} = \tag{2}$$

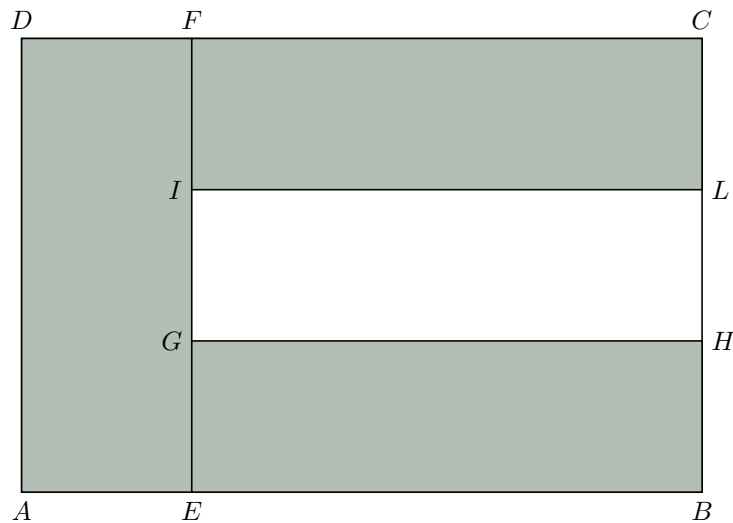
$$\frac{4x+4+2x}{5} = \tag{3}$$

$$\frac{2(3x+2)}{5} \tag{4}$$

Dalla (1) osserviamo che il numero di ragazze iniziali x deve essere un multiplo di 2, e dalla (4) ricaviamo che x deve essere tale che $3x+2$ sia un multiplo di 5 in quanto il numero di passeggeri dopo la seconda fermata deve essere un numero intero.
Proviamo a verificare quali x pari soddisfano queste condizioni e che $2x$ non può essere maggiore di 30:

x	**3x+2**
2	8
4	13
6	20
8	26
10	32
12	38
14	44

L'unica soluzione è quella per cui $x = 6$ e $3x + 2 = 20$.
Il numero di passeggeri dopo la seconda fermata $\frac{2(3 \times 6 + 2)}{5} = \mathbf{8}$.

7 La bandiera

L'area totale della bandiera è $120 \times 180 = 21600$. Visto che i 4 rettangoli hanno la stessa area allora questa è $21600 : 4 = 5400$.
Da ciò possiamo ricavare il lato AE visto che del rettangolo AEFD conosciamo area ed altezza:

$\overline{\text{AE}} = 5400 : 120 = 45$

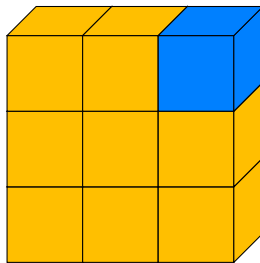
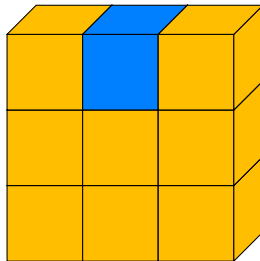
La lunghezza del rettangolo bianco ($\overline{\text{GH}}$) è la stessa del rettangolo sottostante EBHG. Questa di ricava facilmente:

$$\overline{\text{GH}} = \overline{\text{EB}} = \overline{\text{AB}} - \overline{\text{AE}}$$
$$\overline{\text{GH}} = \overline{\text{EB}} = 180 - 45 = 135$$

8 Nero ma non troppo

Il totale dei quadrati neri Q presenti sulle facce è dato dalla somma

$$Q = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Di questi 21 sappiamo che 6, uno per ogni faccia del grande cubo, è posizionato al centro. I rimanenti 15 sono posizionati o in un angolo della faccia o adiacente al centro.
Per lo stesso motivo sappiamo che 6 cubetti neri sono utilizzati al centro di ogni faccia del cubo grande. I rimanenti 6 sono posizionati su un vertice del cubo, come in questo esempio:

o su uno spigolo, come in questo secondo esempio:

I cubetti neri posizionati su un vertice contribuiscono a mostrare 3 quadrati neri, mentre quelli posizionati su uno spigolo contribuiscono per 2 quadrati neri.
Se chiamiamo V il numero di cubetti posizionati su un vertice ed S il numero di cubetti posizionati su uno spigolo abbiamo, per le considerazioni fatte sopra, queste due equazioni:

$$\begin{cases} V + S = 6 \\ 3V + 2S = 15 \end{cases}$$

Da cui si ricava facilmente

$$\begin{cases} V = 3 \\ S = 3 \end{cases}$$

Il numero di cubetti posizionati sui vertici è **3**.

9 Il mcm

Per questo tipo di problemi si può procedere per tentativi tenendo conto del fatto che per minimizzare il mcm cercheremo di trovare 5 numeri che siano composti da un minor numero di fattori possibile.

I 5 numeri proposti come esempio hanno questi fattori in comune:

$$2^4 \quad 5$$

Sono 5 fattori il cui prodotto è 80.

Si possono trovare 5 numeri composti da soli 4 fattori diversi come

$$18 \quad 9 \quad 4 \quad 3 \quad 1$$

che sono composti dai soli fattori

$$2^2 \quad 3^2$$

l'mcm risultante è 36.

Si possono trovare anche soluzioni con soli 3 fattori come:

$$15 \quad 10 \quad 6 \quad 3 \quad 1$$

che sono composti dai soli fattori

$$2 \quad 3 \quad 5$$

l'mcm risultante è **30** che è la soluzione minima.

Per diminuire ancora dovremmo trovare 5 numeri caratterizzati dai 3 fattori più piccoli cioè $2^2,\ 3$ oppure $2,\ 3^2$ oppure da due soli fattori.

Vediamo perché possiamo escludere i casi suddetti:

caso 1: fattori $2^2,\ 3$
con questi 3 fattori possiamo generare i seguenti numeri interi:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 12$$

la cui somma non arriva a 35

caso 2: fattori $2,\ 3^2$
con questi 3 fattori possiamo generare i seguenti numeri interi:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 18$$

con i quali non si riesce a sceglierne 5 la cui somma sia 35

caso 3: fattori $a,\ b$
con questi 2 fattori possiamo generare solo 4 numeri interi:

$$1 \quad a \quad b \quad ab$$

che non sono abbastanza per avere 5 numeri distinti

caso 3: fattori a^2
con questi 2 fattori possiamo generare solo 3 numeri interi:

$$1 \quad a \quad a^2$$

che non sono abbastanza per avere 5 numeri distinti

10 2021 in breve

I possibili numeri composti da sole cifre 3 o 5 che possiamo utilizzare sono questi:
3, 5, 33, 35, 53, 55, 333, 335, 353, 355, 533, 535, 553, 555

Vediamo come ottenere l'unità 1 del numero 2021:
1) $7 \times 3 + 0 \times 5 = 21$
2) $2 \times 3 + 5 \times 5 = 31$

Caso 1: utilizziamo tutti e sette i numeri che finiscono con il 3
$3 + 33 + 53 + 333 + 353 + 533 + 553 = 1861$

la loro somma non è 2021, quindi non è la soluzione cercata.

Caso 2: $2 \times 3 + 5 \times 5 = 31$
Dalle unità dei sette numeri otteniamo 31, per arrivare a 2021 manca:
$2021 - 31 = 1990$

Analizziamo come ottenere la decina (9) di quello che manca, cioè 1990. La decina la otteniamo sommando tutte le decine dei numeri utilizzati. Abbiamo due possibilità:
2a) $3 \times 30 + 4 \times 50$ (usando 7 numeri di 2 o 3 cifre)
2b) $3 \times 30 + 2 \times 50$ (usando i numeri "3" e "5" e poi altri 5 numeri a 2 o 3 cifre)

Caso 2a: $3 \times 30 + 4 \times 50 = 290$
Per arrivare a 1990 manca:
$1990 - 290 = 1700$
lo possiamo ottenere solo con $4 \times 300 + 1 \times 500$
il che ci porta ad aver utilizzato **9 volte** il numero 3:
2 volte nelle unità, 3 volte nelle decine e 4 volte nelle centinaia:
$333 + 335 + 353 + 355 + 555 + 55 + 35 = 2021$

Caso 2b: $3 \times 30 + 2 \times 50 = 190$
Per arrivare a 1990 manca:
$1990 - 190 = 1800$
lo possiamo ottenere solo con $1 \times 300 + 3 \times 500$
il che ci porta ad aver utilizzato **6 volte** il numero 3:
2 volte nelle unità, 3 volte nelle decine e 1 volta nelle centinaia:
$3 + 5 + 35 + 355 + 533 + 535 + 555 = 2021$

Il problema ha 2 soluzioni: **6 e 9**.

11 Le terne

Per prima cosa cerchiamo di capire quando compare per la quarta volta la terna (101).

Come mostrato nel testo la terna non compare tra i primi numeri ad una cifra ma la troviamo subito tra i numeri a due cifre "10" "11". Nei successivi numeri a due cifre la terna non compare più in quanto lo 0 seguirà sempre cifre diverse da 1 (20, 30, 40, ecc...).

Il totale delle cifre necessarie per scrivere i numeri da 1 a 99 è
$9 + 90 \times 2 = 189$
189 è divisibile per 3, quindi significa che l'ultima terna finisce proprio con il numero 99: sarà la terna (899).

Tutti i numeri a 3 cifre sono quindi essi stessi delle terne, perciò ci sarà una sola terna (101) che corrisponde proprio al numero 101.

Elenchiamo ora i primi numeri a 4 cifre raccogliendoli le terne tramite le parentesi tonde. Abbiamo coloriamo le cifre in rosso e blu per evidenziare i numeri:

(100)(010)(011)(002)(100)(310)(041)(005)(100)(610)(071)(008)(100)(910)
(**101**)(011)(**101**)(210)(131)(014)(**101**)(5

la terna (101) compare 3 volte arrivando quindi a presentarsi la quinta volta in corrispondenza del numero 1015.

Ora contiamo quante volte si presenta la terna (131) entro la scrittura del numero 1015.

La prima volta si presenta in corrispondenza dei numeri 13 e 14 come vediamo nel testo del problema.
Non compare nella serie dei successivi numeri a 2 cifre. Infatti basta pensare che le cifre 31 potrebbero contribuire a formala ma non succede in quanto sono precedute dal numero 30 e quindi possono creare al massimo la terna (031).

Nella serie dei numeri a 3 cifre abbiamo la terna (131) in corrispondenza del numero 131.

Nella serie dei numeri a 4 cifre minori uguali di 1015, possiamo vedere dall'elenco scritto sopra che la terna (131) compare una sola volta durante la scrittura dei numeri 1013 e 1014.

Il numero totale di terne (131) scritte prima della quinta terna (101) è **3**.

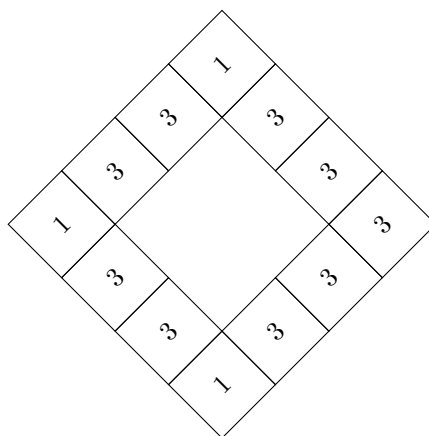
12 Quadrato di cubi

Iniziamo calcolando i cubi di 4 cifre. Il primo è ovviamente $10^3 = 1000$, i successivi sono:
$11^3 = 1331$
$12^3 = 1728$
$13^3 = 2197$
$14^3 = 2744$
$15^3 = 3375$
$16^3 = 4096$
$17^3 = 4913$
$18^3 = 5832$
$19^3 = 6859$
$20^3 = 8000$

$21^3 = 9261$

Osserviamo che nel quadrato le caselle in angolo conterranno una cifra che sarà in comune a due cubi. Per la precisione sarà la cifra dell'unità di un numero e la cifra delle migliaia di un altro.

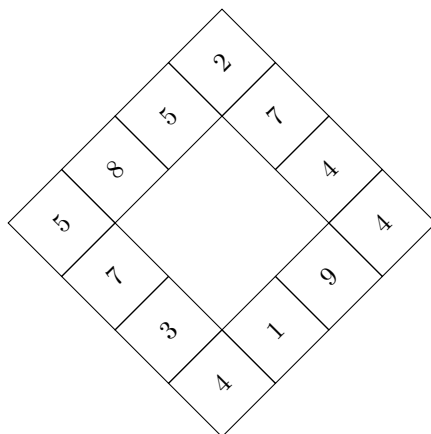
Visto che un numero non può iniziare con "0" allora lo "0" non può essere la cifra dell'unità di una dei quattro numeri da inserire. Se lo fosse allora sarebbe anche la prima cifra di un altro dei numeri presenti nel quadrato.
Per questo escludiamo 1000 e 8000.

Il cubo 1331 è caratterizzato da avere la prima e l'ultima cifra uguali. Questo ci permette di avere una prima soluzione banale che consiste nell'utilizzare solo il numero 1331 per riempire il quadrato.

Una soluzione è quindi **1331**.

Proviamo a cercare un'altra soluzione utilizzando gli altri numeri.

Procediamo escludendo quei numeri che hanno una cifra delle migliaia che non compare come cifra delle unità in nessuno degli altri numeri e viceversa:

- eliminiamo il numero 1728 per la cifra "8"
- eliminiamo il numero 2197 per la cifra "7"
- eliminiamo il numero 9261 per la cifra "1"
- eliminiamo il numero 4096 per la cifra "4"
- eliminiamo il numero 6859 per la cifra "6"

Rimangono i 4 cubi 2744, 3375, 4913 e 5852 che possono essere inseriti nel quadrato in quest'ordine: 5852, 2744, 4913, 3375.

Il più piccolo di questi è **2744**.

13 L'acquario

Chiamiamo "a", "b" ed "h" le tre dimensioni del parallelepipedo e "V" il suo volume. Le condizioni imposte dal problema le possiamo rappresentare con queste 4 equazioni:

$$V = a \cdot b \cdot h \tag{1}$$
$$V = 3ab + 6000 \tag{2}$$
$$V = 4ah + 6000 \tag{3}$$
$$V = 5bh + 6000 \tag{4}$$

La (2) e la (3) ci permettono di derivare:

$$3ab + 6000 = 4ah + 6000 \tag{5}$$
$$3ab = 4ah \tag{6}$$
$$b = \frac{4}{3}h \tag{7}$$

La (2) e la (4) ci permettono di derivare:

$$3ab + 6000 = 5bh + 6000 \tag{8}$$
$$3ab = 5bh \tag{9}$$
$$a = \frac{5}{3}h \tag{10}$$

La sostituendo "a" e "b" nella (1) e nella (4) otteniamo:

$$V = \frac{20}{9}h^3 \tag{11}$$

$$V = 6000 + \frac{20}{3}h^2 \tag{12}$$

Che insieme ci portano all'equazione in "h":

$$\frac{20}{9}h^3 = 6000 + \frac{20}{3}h^2$$
$$\frac{20}{9}h^3 - \frac{20}{3}h^2 = 6000$$
$$\frac{20}{3}h^2(\frac{h}{3} - 1) = 6000$$
$$h^2(\frac{h-3}{3}) = 6000\frac{3}{20}$$
$$h^2(h-3) = 3 \cdot 6000 \cdot \frac{3}{20} = 27000 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

Nella parte destra dell'equazione ci sono 3 fattori 3. Nella parte sinistra notiamo che se h è divisibile per 3 lo è anche l'altro fattore $(h-3)$ in quanto differenza di due multipli di 3. Viceversa se h non fosse divisibile per 3 non lo sarebbe neppure $(h-3)$. Quindi "h" deve contenere il fattore 3 una volta, così abbiamo che h^2 è multiplo di 3^2 e $(h-3)$ è multiplo di 3, che corrisponde alla fattorizzazione 3^3.

Possiamo procedere per tentativi valutando se h possa contenere anche i fattori 2 e 5:
Se poniamo $h = 3$ otteniamo $9 \cdot 6 \neq 2700$. Equazione non soddisfatta.
Se poniamo $h = 3 \cdot 2 = 6$ otteniamo $36 \cdot 3 \neq 2700$. Equazione non soddisfatta.
Se poniamo $h = 3 \cdot 5 = 15$ otteniamo $225 \cdot 12 = 2700$. **Equazione soddisfatta**.
Se poniamo $h = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ otteniamo $900 \cdot 27 \neq 2700$. Equazione non soddisfatta.

Utilizzando $h = 15$ otteniamo dalla (10) $a = 25$ e dalla (7) $b = 20$. Con queste 3 grandezze ricaviamo infine il volume del parallelepipedo: $15 \cdot 25 \cdot 20 = \mathbf{7500} cm^3$.

14 Le cavallette

La situazione iniziale descritta dal problema prevede 5 caselle dove le 5 cavallette nascondono 5 interi positivi. Dopo ogni salto simultaneo delle cavallette la somma totale dei numeri visibili sulle caselle cresce di un fattore 10 diventando molto più grande. Questo ci indica che ad ogni salto sono scoperti dei numeri molto grandi. Più grandi di quelli visibili prima del salto. Per esempio, con il primo salto passiamo da una somma di 100 ad una somma di 1000. Questi aumenti della somma sono ottenibili solo grazie alle caselle inizialmente coperte

dalle 5 cavallette, che poi sono scoperte a seguito dei loro salti.
L'obiettivo è trovare una configurazione di 64 numeri interi da scrivere sulle caselle, la posizione iniziale delle 5 cavallette e i salti che eseguiranno.
Per massimizzare il numero dei salti per ci permettono di moltiplicare per 10 la somma, cerchiamo una configurazione tale che ad ogni salto simultaneo sia scoperta una sola casella. In questo modo abbiamo 5 possibilità di aumentare la somma tramite 5 salti delle cavallette e quindi di passare da 100 a 10.000.000.

Una possibilità è disporre, all'inizio, le cavallette come mostrato di seguito, utilizzando 6 celle adiacenti della scacchiera:

C_3	C_4	C_5
C_2	C_1	x

Con C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 indichiamo la posizione delle 5 cavallette. Con x indichiamo il numero intero presente nella cella.

Il totale delle celle scoperte all'inizio è 100 e corrisponde alla somma delle altre 58 caselle più x.

Ad ogni salto facciamo spostare le cavallette in modo circolare, per cui per esempio C_1 salterà al posto di C_2, C_2 salterà al posto di C_3 e così via:

C_2	C_3	C_4
C_1	a	C_5

Dopo il primo salto abbiamo che il numero x viene coperto ed invece viene scoperto il numero a che prima era nascosto dalla cavalletta C_1.
Il totale dei numeri visibili aumenta della quantità a e diminuisce della quantità x rispetto alla situazione prima del salto. Visto che il nuovo totale deve essere 1.000 abbiamo che:

$$\begin{aligned} 100 - x + a &= 1000 \\ a &= 900 + x \end{aligned}$$

Dopo il secondo salto:

C_1	C_2	C_3
b	C_5	C_4

Il totale diminuisce di a ed aumenta di b per arrivare a 10.000:

$$\begin{aligned} 1000 - a + b &= 10000 \\ b &= 9000 + a \\ b &= 9900 + x \end{aligned}$$

Dopo il terzo salto:

c	C_1	C_2
C_5	C_4	C_3

Il totale diminuisce di b ed aumenta di c per arrivare a 100.000:

$$\begin{aligned} 10000 - b + c &= 100000 \\ c &= 90000 + b \\ c &= 99900 + x \end{aligned}$$

Dopo il quarto salto:

C_5	d	C_1
C_4	C_3	C_2

Il totale diminuisce di c ed aumenta di d per arrivare a 1.000.000:

$$\begin{aligned} 100000 - c + d &= 1000000 \\ d &= 900000 + c \\ d &= 999900 + x \end{aligned}$$

Infine dopo il quinto salto:

C_4	C_5	e
C_3	C_2	C_1

Il totale diminuisce di d ed aumenta di e per arrivare a 10.000.000:

$$\begin{aligned}1000000 - d + e &= 10000000\\ e &= 900000 + d\\ e &= 999900 + x\end{aligned}$$

La nostra scacchierà risulta quindi configurata con questi numeri:

Le caselle evidenziate in giallo sono quelle visibili inizialmente, che sappiamo avere come somma totale 100. Le altre 5 sono quelle coperte all'inzio dalle 5 cavallette.
Il totale di tutte le 64 caselle è:

$$100 + a + b + c + d + e =$$
$$100 + 900 + x + 9900 + x + 99900 + x + 999900 + x + 9999900 + x =$$
$$11110600 + 5x$$

Analizziamo i possibili valori che può assumere x. Le 58 caselle inizialmente scoperte, oltre a quella con valore x, parteciperanno con un valore di almeno 1 per casella e quindi in totale per al meno 58. Per arrivare a 100 avremo che x assumerà il valore massimo di 42. Aumentando il valore di qualche casella, possiamo avere per x qualsiasi altro valore intero positivo minore di 42.

Per $x = 42$ abbiamo che il totale delle 64 caselle diventa

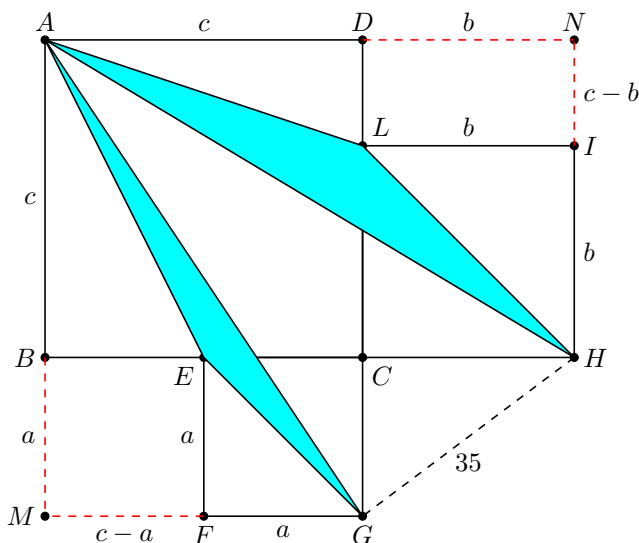
$$11110600 + 5x = 11110600 + 5 \times 42 = 11110810$$

11110810 non è divisibile per 35, ma ha resto 25, che fortunatamente è divisibile per 5. Questo ci suggerisce la soluzione: utilizzando come $x = 42 - 5 = 37$ otteniamo un totale più piccolo di $5 \times 5 = 25$, e quindi con resto 0 rispetto alla divisione per 35:

$$11110600 + 5x = 11110600 + 5 \times 37 = 11110785$$

La soluzione è **11.110.785**.

15 Le punte

Chiamiamo la lunghezza dei tre lati dei tre quadrati a, b e c. Mostriamo queste 3 lunghezze, ed altre da loro derivate, nella figura del problema:

L'area del triangolo celeste $\overset{\triangle}{AGE}$ è data dall'area del triangolo $\overset{\triangle}{AGM}$ meno l'area del triangolo $\overset{\triangle}{EGF}$ meno l'area del triangolo $\overset{\triangle}{ABE}$ meno l'are del rettangolo $BEFM$.

$$A_{AEG} = A_{AGM} - A_{EGF} - A_{ABE} - A_{BEFM}$$

$$A_{AEG} = \frac{c(c+a)}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{c(c-a)}{2} - a(c-a)$$

$$A_{AEG} = \frac{c^2 + ac - a^2 - c^2 + ac - 2ac + 2a^2}{2}$$

$$A_{AEG} = \frac{a^2}{2}$$

L'area del triangolo celeste $\overset{\triangle}{ALH}$ è data dall'area del triangolo $\overset{\triangle}{ANH}$ meno l'area del triangolo $\overset{\triangle}{ADL}$ meno l'area del triangolo $\overset{\triangle}{LIH}$ meno l'are del rettangolo $DNLI$.

$$A_{ALH} = A_{ANH} - A_{LIH} - A_{ADL} - A_{DNLI}$$
$$A_{ALH} = \frac{c(c+b)}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{c(c-b)}{2} - b(c-b)$$
$$A_{ALH} = \frac{c^2 + bc - b^2 - c^2 + bc - 2bc + 2b^2}{2}$$
$$A_{ALH} = \frac{b^2}{2}$$

Per la simmetria del disegno potevamo già capire che i due triangoli avessero formule dove l'incognita "a" si scambia con l'incognita "b".

La somma delle due aree è:

$$A_{AEG} + A_{ALH} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

"a" e "b" sono anche le lunghezze dei due cateti CG e CH del triangolo $\overset{\triangle}{GCH}$ la cui ipotenusa vale 35. Per il teorema di Pitagora sul quel triangolo abbiamo

$$a^2 + b^2 = 35^2$$

quindi:

$$A_{AEG} + A_{ALH} = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{35^2}{2} = 612,5cm^2 = 61250mm^2$$

L'area celeste nel disegno è **61250** mm^2

16 Una strada, tante somme

Il testo del problema ci chiede di trovare un numero N tale che la somma dei numeri interi da 1 ad N-1 sia uguale alla somma degli interi da N+1 fino un certo numero successivo che indicheremo con N+k.
Utilizziamo la nota formula per calcolare la somma dei numeri interi da 1 ad n:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quindi la somma dei numeri da 1 ad N-1 è:

$$S_N = \frac{N(N-1)}{2}$$

La somma dei numeri interi da $N+1$ a $N+k$ può essere vista come la somma degli interi da 1 a $N+k$ meno la somma degli interi da 1 a N, cioè:

$$\frac{(N+k)(N+k+1)}{2} - \frac{N(N+1)}{2}$$

Queste due somme devono essere uguali per l'N corrispondente al numero di Cédric:

$$\begin{aligned}
\frac{N(N-1)}{2} &= \frac{(N+k)(N+k+1)}{2} - \frac{N(N+1)}{2} \\
N(N-1) &= (N+k)(N+k+1) - N(N+1) \\
N(N-1) + N(N+1) &= (N+k)(N+k+1) \\
N(N-1+N+1) &= (N+k)(N+k+1) \\
2N^2 &= (N+k)(N+k+1)
\end{aligned}$$

Questa equazione ha due caratteristiche: il membro di sinistra è il doppio di un quadrato e il membro di destra è il prodotto di due interi che non hanno fattori in comune in quanto consecutivi. Questo ci porta a dedurre che i due fattori $(N+k)$ e $(N+k+1)$ sono uno un quadrato e l'altro il doppio di un quadrato. Infatti se scriviamo N come prodotto dei numeri primi che lo compongono:

$$N = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_h}^{\alpha_h}$$

abbiamo:

$$2N^2 = 2 \cdot {p_1}^{2\alpha_1} \cdot {p_2}^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_h}^{2\alpha_h}$$

Tutti gli esponenti α sono pari in quanto derivano da N^2.
Visto che $(N+k)$ e $(N+k+1)$ non hanno fattori in comune allora ogni fattore di N deve essere presente completamente (cioè al suo esponente massimo) in $(N+k)$ o in $(N+k+1)$. Quindi sia $(N+k)$ che $(N+k+1)$ saranno composti solo da fattori primi con esponente pari ed uno dei due avrà un ulteriore fattore 2. In altre parole uno dei due è un quadrato e l'altro è il doppio di un quadrato.
Visto che N è al massimo 1000 allora abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&(N+k)^2 < (N+k)(N+k+1) = 2N^2 <= 2 \cdot 1000^2 \\
&(N+k)^2 < 2 \cdot 1000^2 \\
&(N+k) < \sqrt{2} \cdot 1000 \simeq 1414
\end{aligned}$$

Quindi cerchiamo un quadrato o un doppio di quadrato consecutivi e minori di 1414:

quadrati: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324, 361,400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089, 1156,1225,1296,1369

doppi di quadrati:2,8,18,32,50,72,98,128,162,200,242,288,338,392,450, 512,578,648,722,800,882 968,1058,1152,1250,1352

Possiamo individuare la coppia 9 (3^2) e 8 ($2 \cdot 2^2$) che corrisponde al numero N=6 proposto nel testo:

$$2N^2 = 9 \cdot 8 = 72$$
$$N = \sqrt{\frac{72}{2}} = 6$$

inoltre la coppia 49 (7^2) e 50 ($2 \cdot 5^2$) che corrisponde al numero N=35 proposto nel testo:

$$2N^2 = 49 \cdot 50 = 2450$$
$$N = \sqrt{\frac{2450}{2}} = 35$$

ed infine la coppia 289 (17^2) e 288 ($2 \cdot 12^2$) che corrisponde al numero N=204:

$$2N^2 = 289 \cdot 288 = 83232$$
$$N = \sqrt{\frac{83232}{2}} = 204$$

Il numero N in cui abita Cédric è **204**.

17 I balbettii

Chiamiamo F_i i termini della serie con cui gioca Fibo (ovviamente la serie di Fibonacci):

$$
\begin{aligned}
&F_1 = 1 \\
&F_2 = 1 \\
&F_3 = F_2 + F_1 = 2 \\
&F_4 = F_3 + F_2 = 3 \\
&... \\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2}
\end{aligned}
$$

Indichiamo invece con B_i i termini della nuova serie creata da Fibo:

$$
\begin{aligned}
&B_1 = F_1 = 1 \\
&B_n = 10B_{n-1} + F_n
\end{aligned}
$$

Sviluppiamo i primi termini di B_i

$$
\begin{aligned}
&B_1 = F_1 = 1 \\
&B_2 = 10B_1 + F_2 = 10F_1 + F_2 \\
&B_3 = 10B_2 + F_3 = 100F_1 + 10F_2 + F_3 \\
&... \\
&B_n = 10^{n-1}F1 + 10^{n-2}F2 + ... + 10F_{n-1} + F_n \\
&B_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{n-k} F_k
\end{aligned}
$$

Costruisco una nuova serie D_i che ha le stesse cifre di B_i ma spostate nella parte decimale:

$$D_n = \frac{B_n}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k} F_k$$

Questa serie converge al razionale D per $n \to \infty$

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} F_k$$

Per calcolare D utilizziamo la funzione generatrice dei numeri di Fibonacci:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k F_k = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Che corrisponde proprio a D nel caso in cui $x = 10^{-1}$

$$D = S(10^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} F_k = \frac{10^{-1}}{1 - 10^{-1} - 10^{-2}} = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100}} =$$
$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{100-10-1}{100}} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{89}{100}} = \frac{10}{89}$$

Le cifre decimali di $\frac{10}{89}$ sono le stesse cifre che compaiono nella serie B_i e che inizieranno a ripetersi. $\frac{10}{89}$ è quindi una frazione con un periodo uguale ai blocchi di B_i che ci aspettiamo si ripetano.
Il problema è diventato quindi calcolare il periodo della frazione $\frac{10}{89}$.
Le frazioni periodiche (senza antiperiodo) hanno la forma

$$\frac{N}{99...9}$$

Dove a denominatore c'è un numero composto da sole cifre "9". Il numero di cifre corrisponde con la lunghezza del periodo. La frazione sarà poi ridotta ai minimi termini in modo da diventare $\frac{10}{89}$

$$\frac{10}{89} = \frac{N}{99...9} = \frac{10 \cdot k}{89 \cdot k}$$

Dobbiamo capire quale intero composto dal minor numero di cifre "9" è divisibile per 89. Cioè il minor numero "h" di cifre "9" per cui:

$$89 \cdot m = 999...9$$

I numeri composti da sole cifre "9" posso essere scritti come $10^h - 1$ dove "h" è il numero di cifre "9".

$$89 \cdot m = 999...9 = 10^h - 1$$
$$89 \cdot m + 1 = 10^h$$

10^h è quindi un intero che ha resto 1 rispetto alla divisione intera per 89.
Proviamo a cercare l'intero "h" che soddisfa questa condizione.
Per h=2 abbiamo:

$$10^2 = 100 \text{ (resto 11 rispetto ad 89)}$$

Per h=3 osserviamo che possiamo sfruttare il resto del caso h=2:

$$10^3 = 10^2 \cdot 10 = (q \cdot 89 + 11)10 =$$
$$q \cdot 890 + 11 \cdot 10 = 110 \text{ (resto 21 rispetto ad 89)}$$

Il resto di 10^3 rispetto alla divisione per 89 dipende solo dal risultato del prodotto tra il resto per la divisione per 10^2 e 10.
Procedendo in questo modo arriveremo, con una certa fatica, a calcolare che il resto della divisione di 10^{44} per 89 è proprio 1. Questo significa che 999...9 (di 44 cifre) è multipli di 89 e quindi il periodo della frazione $\frac{10}{89}$ é 44.

Sfruttando alcuni risultati della teoria dei numeri possiamo ridurre il numero dei passi e dei calcoli. Il piccolo teorema di Fermat ci dice che preso un intero "a" ed un numero primo "p" coprimo con "a" allora abbiamo

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{\text{p}}$$

cioè a^{p-1} ha resto 1 se diviso per p
Nel nostro caso abbiamo che

$$10^{89-1} \equiv 1 \pmod{89}$$
$$10^{88} \equiv 1 \pmod{89}$$

Questo implica che un qualsiasi h per cui $10^h = 1$ deve essere un divisore di 88. Dimostriamo questa affermazione considerando il più piccolo h per cui $10^h = 1$ e supponiamo per assurdo che h non sia un divisore di 88.
Avremo che 88 diviso per h avrà un resto r maggiore da 0 e minore di h.

$$88 = q \cdot h + r \tag{1}$$

Inoltre possiamo scrivere:

$$10^h = 89 \cdot w + 1 \tag{2}$$
$$10^{88} = 89 \cdot v + 1 \tag{3}$$

Sviluppiamo 10^{88} tramite la (1):

$$10^{88} = 10^{q \cdot h + r} = 10^{q \cdot h} \cdot 10^r = (10^h)^q \cdot 10^r \tag{4}$$

Sostituiamo la (2) e la (3)

$$89 \cdot v + 1 = (89 \cdot w + 1)^q \cdot 10^r \tag{5}$$

Nel membro di destra di questa equazione abbiamo tutti termini multipli di 89 eccetto 10^r. Il membro di sinistra ha resto 1 rispetto alla divisione per 89. Questo implica che così sarà anche per il membro di destra. A sua volta questo implica che 10^r deve avere resto 1, ma allora abbiamo in assurto in quanto avevamo ipotizzato che h fosse il minimo per cui 10^h ha resto 1 rispetto a 89, ma r è minore di h.
Possiamo sfruttare questo risultato per cercare il nostro esponente di 10, per cui 10^h ha resto 1, tra i soli divisori di 88. I divisori di 88 sono: 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44 e 88.
$10^1 = 10$ ha resto 10

$10^2 = 100$ ha resto 11

$10^3 = 1000$ ha resto 21

$10^4 = 10^2 \times 10^2 = (89 + 11)(89 + 11) = k89 + 11 \times 11$
Il resto dipende solo dal prodotto $11 \times 11 = 121$ che ha resto 32 rispetto a 89.

$10^8 = 10^4 \times 10^4 = (k_2 89 + 32)(k_2 89 + 32) = k_3 89 + 32 \times 32$
Il resto dipende solo dal prodotto $32 \times 32 = 1024$ che ha resto 45 rispetto a 89.

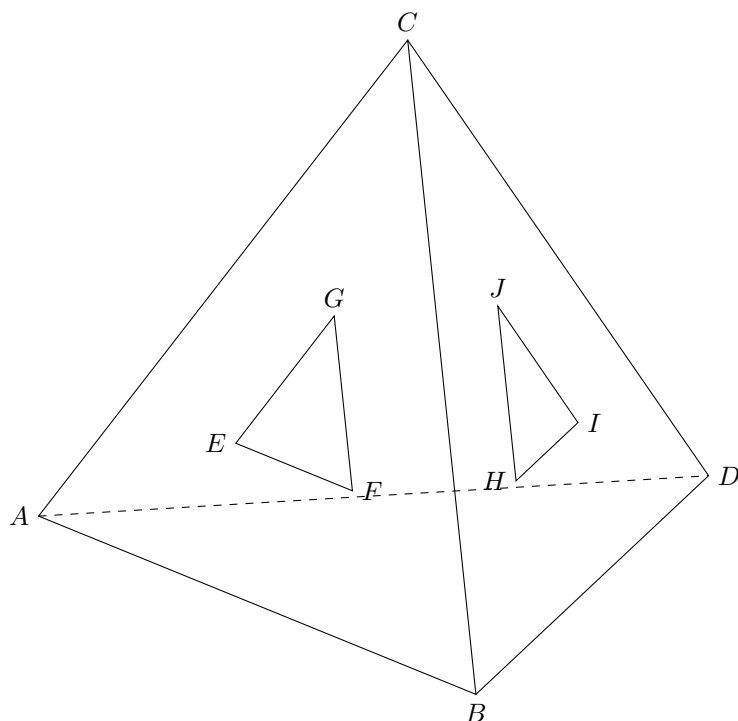
$10^11 = 10^8 \times 10^3 = (k_4 89 + 45)(11 \times 89 + 21) = k_5 89 + 45 \times 21$
Il resto dipende solo dal prodotto $45 \times 21 = 945$ che ha resto 55 rispetto a 89.

$10^22 = 10^11 \times 10^11 = (k_6 89 + 55)(k_6 89 + 55) = k_7 89 + 55 \times 55$
Il resto dipende solo dal prodotto $55 \times 55 = 3025$ che ha resto 88 rispetto a 89.

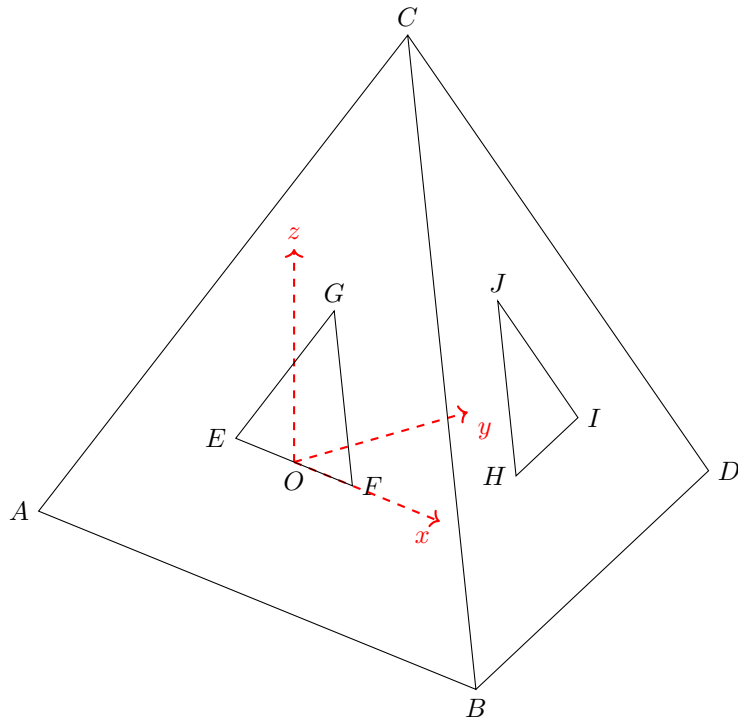
$10^44 = 10^22 \times 10^22 = (k_8 89 + 88)(k_8 89 + 88) = k_9 89 + 88 \times 88$
Il resto dipende solo dal prodotto $88 \times 88 = 7744$ che ha resto 1 rispetto a 89.

Si poteva semplificare questo ultimo calcolo osservando che $88 = 89 - 1$ per cui: $88 \times 88 = (89 - 1)(89 - 1) = h89 + (-1)(-1) = h89 + 1$ cioè abbiamo resto 1 rispetto alla divisione per 89.

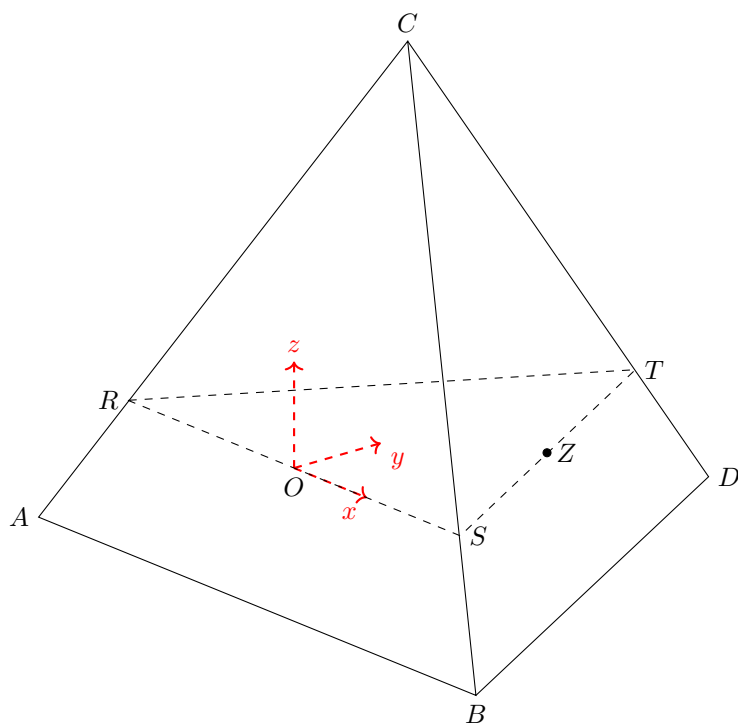
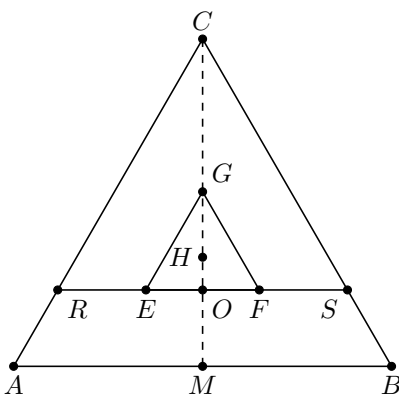
Da questo ricaviamo che il periodo della frazione $\frac{10}{89}$ é 44.

18 La mosca intrappolata

Senza perdita di generalità (basta ruotare opportunamente il tetraedro) consideriamo il caso in cui la mosca inizia il suo percorso dal vertice F. Da questo ha a disposizione 3 tipi di cammini: da F ad H, da F a J e da F ad I.

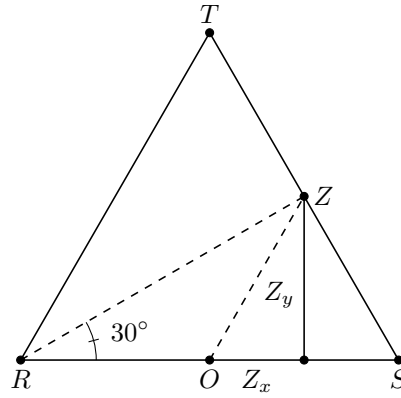
Cammino F-H: una volta raggiunto il vertice H la mosca, utilizzando un cammino della stessa lunghezza, potrebbe solo raggiungere F o il vertice più vicino a B nella faccia ABD della lanterna. Però non riuscirà mai a raggiungere la faccia ADC.

Cammino F-J: Utilizziamo un approccio analitico, cioè cerchiamo di calcolare le coordinate nello spazio dei punti F e J e poi ne calcoliamo la distanza.
Chiamiamo "l" la lunghezza del lato dei piccoli triangoli (lato EF per esempio). Poniamo l'origine degli assi x, y, z nel punto medio tra E ed F. Come asse x utilizziamo una retta parallela alla retta passante per AB. Come asse y una retta perpendicolare a x e appartenente al piano dove risiede la faccia ABD del tetraedro. Come asse z una retta perpendicolare al piano individuato da x ed y e passante per l'origine.

Le coordinate di F sono semplici in quanto ha una componente non nulla solo lungo l'asse x

$$F = (\frac{l}{2}; 0; 0)$$

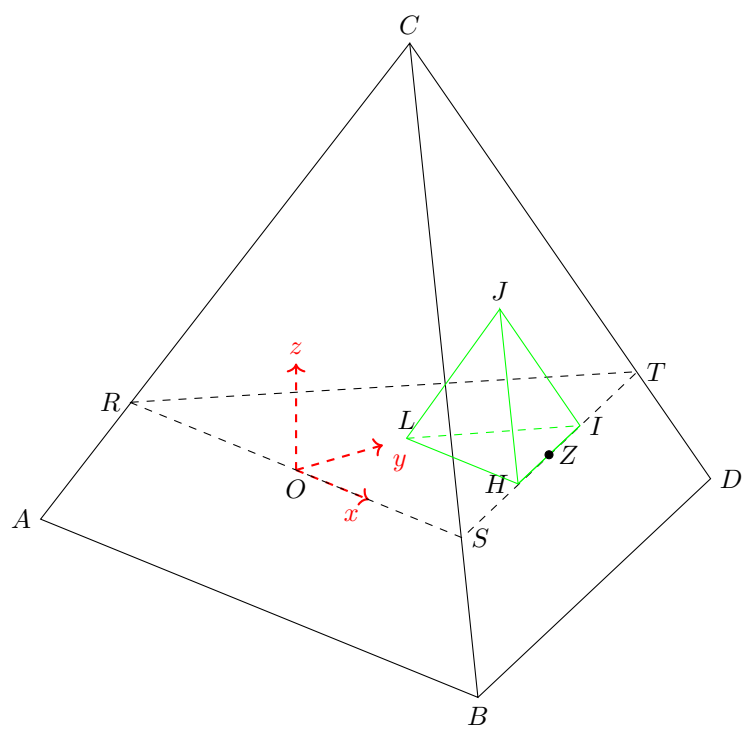
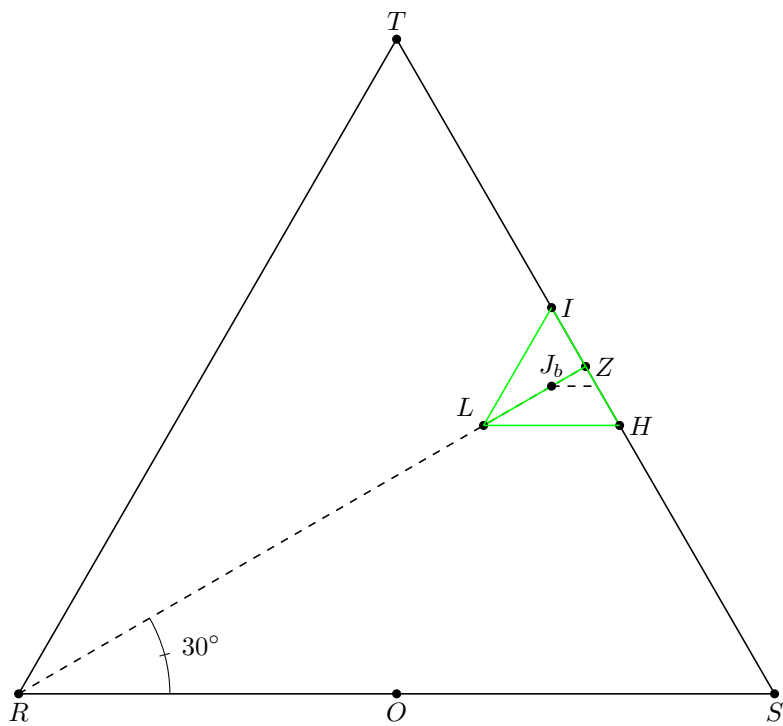
Consideriamo il triangolo che si ottiene dall'intersezione del piano xy con il tetraedro, chiamiamo R, S, e T i sui vertici e chiamiamo Z il punto medio tra S e T:

Disegniamo sul piano la faccia ABC:

Calcoliamo il lato RS (anzi la sua metà), ricordando che il centro del triangolo divide la sua media (in questo caso anche la sua altezza) in due parti dove quella più vicina al vertice è il doppio dell'altra.

$$CM = \frac{\sqrt{3}}{2}CB = \frac{\sqrt{3}}{2}30 = 15\sqrt{3}$$
$$CO = CH + HO = \frac{2}{3}CM + \frac{1}{3}GF = 10\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l$$
$$OS = \frac{CO}{\sqrt{3}} = 10 + \frac{1}{6}l$$

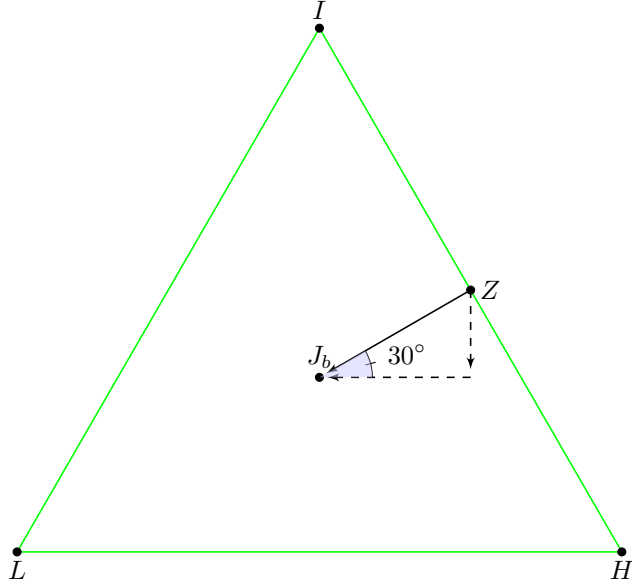
Ridisegnamo il triangolo RST sul piano per comodità:

O è punto medio di RS e Z è punto medio di TS. Il triangolo OZS è simile a RST e quindi anche lui equilatero.
Visto che RZ è una mediana e quindi anche una bisettrice di RST l'angolo ZRO ha ampiezza 30°.

Calcoliamo le coordinate di Z:

$$Z_x = \frac{OS}{2} = 5 + \frac{1}{12}l$$
$$Z_y = \frac{\sqrt{3}}{2}OS = \frac{\sqrt{3}}{2}10 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{6}l = 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l$$
$$Z = (5 + \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l)$$

Ora costruiamo un tetraedro di lato IH con una faccia che corrisponde al triangolo JHI al centro della faccia CBD ed orientato come la lanterna.
Lo disegnamo in verde:

Il nostro obiettivo è calcolare le coordinate di J, per farlo calcoliamo prima le sue coordinate sul piano xy della sua proiezione J_b su RST. Riportiamo in verde la faccia della faccia HLI su RST:

J_b cade nel baricentro del triangolo equilatero LHI e quindi la lunghezza del segmento J_bZ è un terzo della lunghezza dell'altezza che a sua volta è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ volte la lunghezza del lato:

$$J_bZ = \frac{1}{3}LZ = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{6}l$$

Evidenziamo il triangolo LHI:

Possiamo calcolare il vettore che porta da Z a J_b ed usarlo per ricavare le coordinate di J_b a partire da quella di Z:

$$|J_bZ| = \frac{\sqrt{3}}{6}l$$
$$\overrightarrow{ZJ_b} = (-|J_bZ|cos(30); -|J_bZ|sen(30))$$
$$\overrightarrow{ZJ_b} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}l \cdot cos(30); -\frac{\sqrt{3}}{6}l \cdot sen(30))$$
$$\overrightarrow{ZJ_b} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}l; -\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{2}l)$$
$$\overrightarrow{ZJ_b} = (-\frac{1}{4}l; -\frac{\sqrt{3}}{12}l)$$

La posizione di J_b rispetto all'origine O è quindi:

$$\overrightarrow{OJ_b} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{ZJ_b} = (5 + \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l) + (-\frac{1}{4}l; -\frac{\sqrt{3}}{12}l)$$
$$\overrightarrow{OJ_b} = (5 + \frac{1}{12}l - \frac{3}{12}l; 5\sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{OJ_b} = (5 - \frac{1}{6}l; 5\sqrt{3})$$

La coordinata di J lungo l'asse z è la lunghezza dell'altezza del tetraedro LHIJ.

Data la lunghezza t del lato di un tetraedro la formula per calcolare l'altezza è:

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}t$$

Quindi la coordinata di J lungo l'asse z è

$$J_z = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$

Le coordinate nelle spazio di J sono:

$$\overrightarrow{J} = (5 - \frac{1}{6}l; 5\sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}l)$$

Finalmente possiamo calcolare la lunghezza del segmento F-J, in funzione di l, percorso dalla mosca come distanza tra J ed F

$$|FJ|^2 = |\overrightarrow{J} - \overrightarrow{F}|^2$$
$$|FJ|^2 = |(5 - \frac{1}{6}l; 5\sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}l) - (\frac{l}{2}; 0; 0)|^2$$
$$|FJ|^2 = (5 - \frac{1}{6}l - \frac{l}{2})^2 + (5\sqrt{3})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3}l)^2$$
$$|FJ|^2 = (5 - \frac{2}{3}l)^2 + (5\sqrt{3})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3}l)^2$$
$$|FJ|^2 = 25 - \frac{20}{3}l + \frac{4}{9}l^2 + 75 + \frac{2}{3}l^2$$
$$|FJ|^2 = \frac{10}{9}l^2 - \frac{20}{3}l + 100$$

Questa è la funzione che descrive una parabola rivolta verso l'alto (il coefficiente di l^2 è positivo) sul piano cartesiano. Il punto in cui assume valore minimo è sul suo vertice che ha ascissa $-\frac{b}{2a}$ dove a e b sono i coefficienti della equazione generica della parabola $ax^2 + bx + c = 0$.

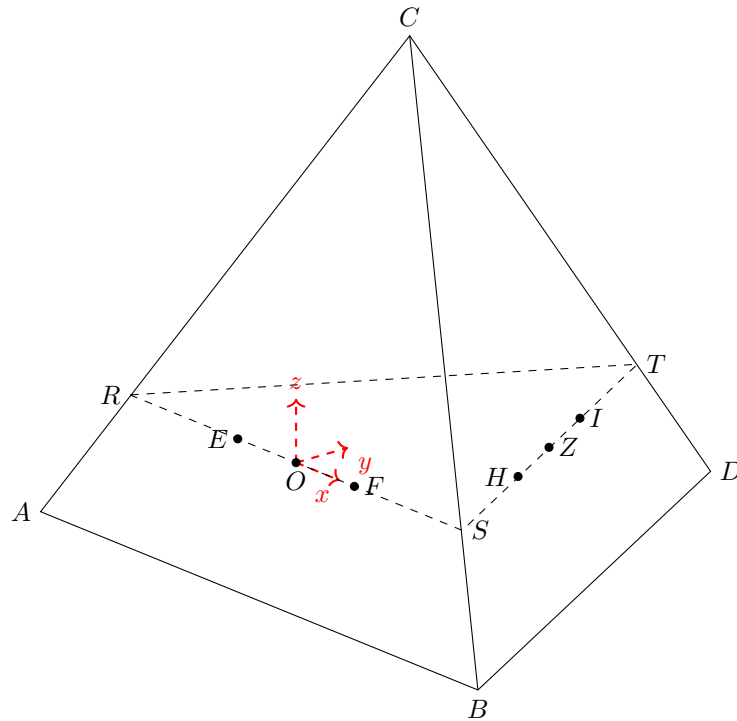
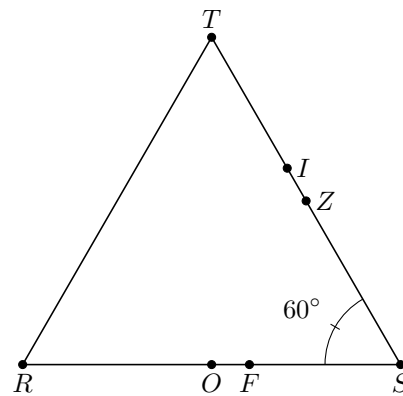
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{20}{3}}{2\frac{10}{9}} = 3$$

Da cui il valore minimo di $|FJ|^2$ ponendo l = 3:

$$|FJ|^2 = \frac{10}{9} - \frac{20}{3} \times 3 + 100$$
$$|FJ|^2 = 10 - 20 + 100 = 90$$
$$|FJ| = \sqrt{90} = 3\sqrt{2}\sqrt{5}$$
$$|FJ| = 3 \times 1,414 \times 2,236 = 9,485112cm = 94,85112mm$$

Il cammino completo, dato da 4 volte il segmento FJ è $4 \times 94,85112mm = 379,40488mm$ che approssimiamo a **379mm**.

Cammino F-I:

Procediamo anche in questo caso in maniera analitica per calcolare la distanza del punto F dal punto I.

Consideriamo il triangolo RST sul piano per comodità:

Abbiamo già visto sopra che le coordinate di F sono semplici in quanto ha una componente non nulla solo lungo l'asse x

$$F = (\frac{l}{2}; 0; 0)$$

Avevamo anche già calcolato la lunghezza del segmento OS:

$$OS = 10 + \frac{1}{6}l = SZ$$

Calcoliamo il vettore dello spostamento da S ad I:

$$\begin{aligned}
|SI| &= SZ + \frac{1}{2}l = 10 + \frac{1}{6}l + \frac{l}{2}l = 10 + \frac{2}{3}l \\
\overrightarrow{SI} &= (-|SI|cos(60); |SI|sen(60)) \\
\overrightarrow{SI} &= (-(10 + \frac{1}{6}l) \cdot cos(60); (10 + \frac{1}{6}l) \cdot sen(60)) \\
\overrightarrow{SI} &= (-(10 + \frac{1}{6}l)\frac{1}{2}; (10 + \frac{1}{6}l)\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
\overrightarrow{SI} &= (-5 - \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l)
\end{aligned}$$

La posizione di I rispetto all'origine O è quindi:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SI} = (10 + \frac{1}{6}l; 0) + (-5 - \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l) \\
\overrightarrow{OI} &= (5 + \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l)
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare la lunghezza, in funzione di l, del segmento F-I percorso dalla mosca come distanza tra I ed F

$$\begin{aligned}
|FI|^2 &= |\overrightarrow{I} - \overrightarrow{F}|^2 \\
|FI|^2 &= |(5 + \frac{1}{12}l; 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l) - (\frac{l}{2}; 0)|^2 \\
|FI|^2 &= (5 + \frac{1}{12}l - \frac{l}{2})^2 + (5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l)^2 \\
|FI|^2 &= (5 - \frac{5}{12}l)^2 + (5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}l)^2 \\
|FI|^2 &= 25 - \frac{50}{12}l + \frac{25}{144}l^2 + 75 + \frac{30}{12}l + \frac{3}{144}l^2 \\
|FI|^2 &= \frac{28}{144}l^2 - \frac{20}{12}l + 100 \\
|FI|^2 &= \frac{7}{36}l^2 - \frac{5}{3}l + 100
\end{aligned}$$

Questa è la funzione che descrive una parabola rivolta verso l'alto (il coefficiente di l^2 è positivo) sul piano cartesiano. Il punto in cui assume valore minimo è sul suo vertice che ha ascissa $-\frac{b}{2a}$ dove a e b sono i coefficienti della equazione generica della parabola $ax^2 + bx + c = 0$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{5}{3}}{2\frac{7}{36}} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{36}{14} = \frac{30}{7}$$

Da cui il valore minimo di $|FJ|^2$ ponendo $l = \frac{30}{7}$:

$$|FI|^2 = \frac{7}{36} \cdot (\frac{30}{7})^2 - \frac{5}{3} \cdot \frac{30}{7} + 100$$
$$|FI|^2 = \frac{25}{7} - \frac{50}{7} + 100 = 100 - \frac{25}{7}$$
$$|FI|^2 = 100 - \frac{25}{7} = 96,4286$$
$$|FI| = \sqrt{96,4286} = 9,8198cm = 98,198mm$$

Il cammino completo, dato da 4 volte il segmento FI è $4 \times 98,198mm = 392,792mm$ che approssimiamo a **393mm**.

Il commino più corto per la mosca è quello che percorre 4 volte i segmenti del tipo FJ che abbiamo precedentemente calcolato valere **379mm**;